

采用有限体积法的自然对流换热 拓扑优化数值方法

杜飞¹, 田镇熊¹, 刘宏磊^{2,3}, 郭书哲³, 郭俊康³, 李宝童³

(1. 西北工业大学航天学院, 710072, 西安; 2. 浙江大学流体动力与机电系统国家重点实验室, 310027, 杭州; 3. 西安交通大学机械工程学院, 710049, 西安)

摘要: 针对基于有限体积法的热-流耦合数值分析缺乏拓扑优化框架问题, 建立了采用有限体积法的自然对流换热拓扑优化方法。建立了流体固体统一描述的自然对流换热数学模型, 提出了基于有限体积法的自然对流求解方法; 通过引入基于结构的离散化描述方法, 搭建了结构的描述框架并构建了流体与固体间的材料属性插值模型; 针对自然对流中增强散热能力与增强物质传输能力问题, 提出了拓扑优化的数学模型, 明确了设计变量、目标函数以及约束条件, 建立了自然对流拓扑优化方法框架; 通过3个算例, 验证了提出的数学模型和求解方法, 并与商业软件 COMSOL 进行了对比。结果表明: 提出的自然对流求解方法与 COMSOL 计算结果相比, 压力、速度、温度的数值误差均小于3%; 对于增强散热能力问题, 采用提出的拓扑优化方法获得的最高温度优于 COMSOL 结果。所提基于有限体积法的自然对流拓扑优化方法的可行性和有效性得到了验证。

关键词: 自然对流; 拓扑优化; 有限体积法; 强化散热; 流体固体统一描述

中图分类号: TH122 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtub202408011 **文章编号:** 0253-987X(2024)08-0103-11

A Numerical Method for Topology Optimization of Natural Convection Heat Transfer Based on Finite Volume Method

DU Fei¹, TIAN Zhenxiong¹, LIU Honglei^{2,3}, GUO Shuzhe³, GUO Junkang³, LI Baotong³

(1. School of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;

2. State Key Laboratory of Fluid Power and Mechatronic Systems, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China;

3. School of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: A topology optimization method for natural convection heat transfer based on the finite volume method (FVM) is established to address the lack of a topology optimization framework in numerical analysis of thermal-fluid coupling based on the FVM. A fluid-solid unified mathematical model of natural convection heat transfer is first established, and a solution algorithm based on the FVM is proposed. By introducing a structure-based discrete description method, a structure description framework and a material attribute interpolation model between the fluid and the solid are constructed. In addition, mathematical models of topology optimization for heat dissipation enhancement and material transport enhancement are proposed, and the design variables, objective functions and constraints are clarified. A framework of natural

收稿日期: 2023-10-03。 作者简介: 杜飞(1984—), 男, 助理教授; 刘宏磊(通信作者), 男, 助理教授。 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(52075445); 流体动力与机电系统国家重点实验室开放基金课题资助(GZKF-202123); 陕西省留学人员科技活动择优资助项目(2022001)。

网络出版时间: 2024-03-09

网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/61.1069.T.20240306.1612.004>

convection topology optimization algorithm is established. Finally, three examples are given to verify the proposed mathematical models and algorithm, and a comparison is made with the commercial software COMSOL. The results show that the numerical differences of pressure, speed and temperature between the natural convection algorithm proposed in this paper and COMSOL are less than 3%. For enhancing heat dissipation capacity, the maximum temperature obtained by the proposed topology optimization method is superior to the COMSOL optimization result. The results verify the feasibility and effectiveness of the proposed natural convection topology optimization method based on the FVM.

Keywords: natural convection; topology optimization; finite volume method; strengthen heat dissipation; fluid solid unified description

自然对流换热以流体中的温度梯度或密度梯度作为驱动力驱使流体对流换热,散热过程无需外围设备,故此类散热器结构简单、成本低、可靠性高、寿命长且无噪声。自然对流广泛应用于核反应堆非动能循环、电子设备散热等方面^[1]。以核反应堆为例,自然对流是一种可靠的非动能循环方法,在核反应堆主泵停止工作时,仅依靠冷热段密度差驱动冷却剂循环,导出堆芯余热,从而保证反应堆的安全。对于核潜艇反应堆而言,核反应堆依靠自然对流实现冷却水循环能力是衡量核潜艇动力性能的重要指标,是实现固有安全性的关键^[2]。

随着核反应堆、电子设备等对于性能要求的不断提高,对于自然对流换热能力的要求也不断提高。自然对流换热能力已成为设备性能提升的瓶颈。提高自然对流换热能力,除了研制更高导热系数的散热材料外,还在于设计更加高效的散热器结构。在传统自然对流散热结构^[3]的设计过程中,设计人员的工程经验往往起到了主导作用,这种设计缺乏系统的热力学分析和优化理论的指导。在当前机电设备尺寸小型化以及功率大型化的发展趋势下,这种依靠经验的设计模式,显得越来越力不从心。拓扑优化是在结构中材料布局形式未知的情况下,依据对物理场的评估与分析,寻求结构中材料的最优分布形式。自然对流换热器的设计问题,本质上是最佳材料分布问题,故拓扑优化是实现换热器设计的有效途径。

自然对流换热的数值模拟,是对换热器进行优化的基础。周祥和陶文铨^[4]采用有限差分法对高瑞利数下二维封闭方腔内自然对流进行了数值模拟,揭示了不同物质发生的流动与换热特性。随后,丁昊和陶文铨^[5]采用类似的离散方法研究了不同瑞利数下液态铅铋合金的自然对流换热特性。田东东等^[6]采用实验的方法研究了不同厚度金属泡沫铜对

换热和对流强度的影响。有限体积法因其存储空间小、稳定性强、便于推广到三维以及能适用于复杂的求解区域,被广泛应用于流体流动、传热的研究。针对自然对流换热问题,解岩等^[7]提出了一种对流项离散格式修正方法,用于非结构网络划分。

为借助拓扑优化方法进行自然对流换热器的设计,首先需建立换热器对流换热过程的物理模型。由于对流换热问题的复杂性,在工程中常使用牛顿冷却定律(Newton's law of cooling, NLC)将自然对流问题简化为导热问题,并赋予对流边界条件,通过选择合适的对流系数来近似的模拟自然对流换热过程^[8]。Burns等^[9]使用具有恒定对流系数的模型,对散热器进行拓扑优化设计,并得到了有着树状分叉的散热器结构。然而,基于NLC模型的自然对流拓扑优化无法将流体的流动纳入分析中,而只能用对流系数来衡量其对换热器的影响,这样的设计结果并不能完全的反应流体的流动与换热特性。

针对上述问题,Alexandersen等^[10]于2014年首次提出了使用全阶自然对流模型进行的散热器的拓扑优化设计。该模型基于不可压缩的稳态层流假设,通过耦合Navier-Stokes方程(动量守恒)与对流-扩散方程(能量守恒)来完成对换热及对流过程的描述。其中,耦合的方程使用有限元方法(finite element method, FEM)离散并使用变密度法(SIMP)来进行优化。Alexandersen等^[11]进一步提出基于变密度法的散热器设计方法,在该方法基础上,设计了用于大功率LED灯的新型散热器^[12]。类似的,Li等^[13]针对自然对流散热器设计,采用拓扑优化方法研究了加热功率、热源尺寸、材料导热系数等对于散热器设计的影响规律。李含灵等^[14]采用基于变密度的自然对流拓扑优化方法,用于三维散热齿的优化设计。Coffin和Maute^[15]基于水平

集方法进行二维和三维自然对流散热器的拓扑优化设计,使用全阶的 Navier-Stokes 方程,其物理模型使用拓展有限元完成求解工作。吴璇和陈群^[16]引入了 Brinkman 摩擦阻力项,利用变分法推导出自然对流的欧拉方程,得到了不动点迭代方法。

在传统的力学结构拓扑优化领域,有限元方法是被广泛使用的数值求解方法。当问题拓展至自然对流拓扑优化时,这种惯性也得以保留。在上述关于自然对流散热器的拓扑优化设计中,几乎都采用了有限单元法作为数值求解方法。另外一方面,在流体数值分析领域,特别是自然对流问题,作为一种热流双向强耦合的复杂问题,其求解难度较高。有限体积法因其自身优势而得到了广泛应用,Bairi 等^[17]根据大量调研指出,目前有限体积法(FVM)是自然对流问题分析中最常用的数值方法。然而,目前基于 FVM 进行自然对流拓扑优化的工作还较少。对于基于 FVM 的热-流耦合拓扑优化问题,仍存在诸多问题,特别是缺少基本的优化框架。

针对上述问题,本文旨在建立基于 FVM 的自然对流换热器的拓扑优化设计方法框架,以此指导散热器设计,本文工作也有助于开发基于有限体积法的拓扑优化计算工具。因此,本文首先对换热器的自然对流换热机理进行研究,建立其热流耦合模型,并推导数值解法,以获得对自然对流换热问题的数值分析能力。在此基础上,提出能强化自然对流的拓扑优化方法,并构建完整的拓扑优化流程,从而获得对自然对流的优化能力,最后通过 3 组算例对所提出的方法进行了验证。

1 流体固体统一描述的自然对流模型及求解

尽管自然对流现象广泛存在,但其作用机理却较为复杂;热源的存在会影响整个空间的温度分布情况,并造成空间中流体的密度差异,在重力场的作用下浮力产生并驱使流体流动,而流体流动又会影 响温度的分布。这是一种传热与流动的双向强耦合问题。此外,当形状待定的固体散热器被引入时,整个对流换热过程将更加复杂。

假设流体为不可压缩层流,流体所受浮力采用 Boussinesq 假设,建立流体的热流耦合模型。为了将固体纳入热流耦合分析过程,基于多孔介质假设对流体模型改造,建立了固体流体统一描述的热流耦合模型。在数值分析方法上,选用有限体积法在二维情况下离散模型,推导自然对流物理场的迭代

求解格式。

1.1 流体固体统一描述的自然对流换热模型

对于流体的自然对流换热问题,其控制方程包含质量守恒方程、动量守恒方程和能量守恒方程。假设冷却介质流动状态为层流,质量守恒方程和能量守恒方程中的流体特性不随温度和压力变化,动量守恒方程中除体积力外其余各项中的流体特性不随温度和压力变化。进一步假设流体不可压缩,且换热过程十分充分,已经达到稳态。在稳态状态下,流体的特性及问题物理场(速度场、温度场、压力场等)分布均不随时间变化。

综上所述,在流体性质不变、不可压缩、等温和稳定流动以及忽略黏性耗散的假设下,同时为了在流体不可压缩假设下考虑浮力的影响,引入 Boussinesq 假设。此时,质量方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

考虑浮力效应的动量守恒方程被改写为

$$\rho_0 \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla P + \nabla \cdot \{ \mu [(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T] \} - \rho_0 \mathbf{g} \beta (T - T_0) + \mathbf{s}_i \quad (2)$$

能量守恒方程为

$$\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (k \nabla T) + s_T \quad (3)$$

式中: $\mathbf{u}$ 、 T 分别为流体速度矢量、温度; P 为包含重力压头的流体压力场; ρ 为流体密度; c_p 为流体比定压热容; k 是流体导热系数; ρ_0 为参考流体密度; T_0 为参考流体温度; β 为热体积膨胀系数; $\mathbf{s}_i$ 是动量源项; s_T 是体积热源项。

在上述控制方程中,仅考虑了流体的流动换热模型,而未将流动与换热特性不同的“固体”纳入考虑。为能将任意形状的固体纳入热流耦合分析过程,引入多孔介质的概念,整个问题领域被视为一个多孔介质区域,流体在其中流动时不考虑固液边界效应,流速分布均匀且受一定的摩擦阻力。摩擦阻力会阻碍流体流动并吸收部分动量,这种阻碍用区域的渗透率来衡量。如果多孔介质的渗透率很低,那么这里的流体由于吸收了大部分的动量而几乎是静止的,从流动特性的角度来看,流体可以看作是固相,反之视为液相。根据多孔介质中固相与液相比例的变化来表示此处流固分布的变化。

为此,在动量守恒方程(式(2))中,引入动量吸收项中的 $\mathbf{s}_i$, 基于 Brinkman 摩擦项来量化多孔介质对流体流动阻碍,即

$$\mathbf{s}_i = -\frac{\mu}{\kappa} \mathbf{u} \quad (4)$$

式中: μ 为流体材料的动态黏度; κ 为多孔介质域内的有效渗透率, 表达式为

$$\kappa(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_f \\ \infty, & x \in \Omega_s \end{cases} \quad (5)$$

式中: Ω_f 为流体区域; Ω_s 为固体区域。同时, 在能量守恒方程中, 根据流体与固体材料属性的不同重新定义热导率 k 。

$$\begin{cases} \mathbf{U} = [P, \rho_0 u_1, \rho_0 u_2, \rho_0 u_3, \rho_0 CT]^T \\ \mathbf{F}^c = [\delta \mathbf{u}, \rho_0 \mathbf{u} \mathbf{u}_1 + P \mathbf{e}_1, \rho_0 \mathbf{u} \mathbf{u}_2 + P \mathbf{e}_2, \rho_0 \mathbf{u} \mathbf{u}_3 + P \mathbf{e}_3, \rho_0 C \mathbf{u} T]^T \\ \mathbf{F}^v = [0, \mu \nabla u_1, \mu \nabla u_2, \mu \nabla u_3, k \nabla T]^T \\ \mathbf{Q} = [0, -\rho_0 g_1 \beta \Delta T - \alpha u_1, -\rho_0 g_2 \beta \Delta T - \alpha u_2, -\rho_0 g_3 \beta \Delta T - \alpha u_3, q]^T \end{cases} \quad (6)$$

式中: $\mathbf{U}$ 是状态变量的向量; $\mathbf{F}^c$ 是对流通量的矩阵; $\mathbf{F}^v$ 是黏性通量的矩阵; $\mathbf{Q}$ 是源项; δ 是伪压缩系数^[19]; $\mathbf{u}^* = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]^T$ 是速度矢量; $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$) 是对应方向的单位方向向量。

采用外节点有限体积单元对自然对流区域进行离散, 将连接节点所属各子区域的中心和边界中点作界面线构建对偶剖分。二维情况下, 其离散方式分别如图 1 所示。图中, Ω_i 是节点 i 的控制体积; 节点 j 是节点 i 的任意相邻节点; $\mathbf{n}_{ij}$ 是单元外部法向量, 位于节点 i 和节点 j 的控制体积的共同边界 S_{ij} 处。

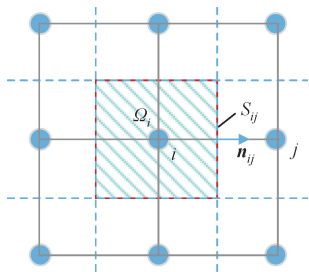


图 1 二维有限体离散示意图

Fig. 1 Two-dimensional finite-body discretization schematic

应用上述参数向量和矩阵, 可将自然对流控制方程写为统一形式。将自然对流控制方程对控制体积 Ω_i 作积分, 并使用高斯散度定理可得

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_i} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dV + \sum_{j \in N(i)} (\tilde{\mathbf{F}}_{ij}^c - \tilde{\mathbf{F}}_{ij}^v) \Delta S_{ij} - \mathbf{Q} |\Omega_i| = \\ \iiint_{\Omega_i} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dV + \mathbf{R}_i(\mathbf{U}) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

式中: $N(i)$ 为节点 i 的相邻节点集; $\tilde{\mathbf{F}}_{ij}^c$ 和 $\tilde{\mathbf{F}}_{ij}^v$ 分别为对流通量 $\mathbf{F}^c$ ^[20] 和黏性通量 $\mathbf{F}^v$ 在边界 S_{ij} 的中点处沿其外法线方向 $\mathbf{n}_{ij}$ 的投影分量; ΔS_{ij} 为控制体积 Ω_i 和 Ω_j 共同界面 S_{ij} 的面积 (二维模型为长度);

1.2 基于有限体积法的求解方法

考虑到自然对流具有双向耦合性且计算量大, 为提高自然对流热沉拓扑优化效率, 本文选择计算复杂度较低且在对流换热求解方面较为成熟的有限体积法作为数值方法。为了提高自然对流问题的数值求解效率, 将自然对流控制方程重构为伪可压缩流体格式^[18], 并引入参数向量和矩阵

$|\Omega_i|$ 为控制体积 (二维模型为面积); $\mathbf{R}_i(\mathbf{U})$ 为式中稳态项的残差。采用隐式欧拉方法对控制方程进行时间离散, 对于稳态项在第 $(n+1)$ 时间层上的残差, 对时间 t_n 进行一阶泰勒展开, 并考虑守恒向量的时间相关性, 可得守恒向量的迭代求解格式

$$\frac{|\Omega_i|}{\Delta t_i^n} \delta_{ij} \cdot \Delta \mathbf{U}_j^n = -\mathbf{R}_i(\mathbf{U}^n) - \frac{\partial \mathbf{R}_i(\mathbf{U}^n)}{\partial \mathbf{U}_j} \cdot \Delta \mathbf{U}_j^n \quad (8)$$

2 基于有限体积法的自然对流拓扑优化

根据上节流体固体统一描述的自然对流控制方程, 以及有限体积法对自然对流进行的描述及求解, 本节提出了自然对流拓扑优化方法。热量的传递与物质的传输是自然对流的主要特征, 为了强化散热过程或强化流动过程, 需要对散热器进行合理的材料分布与结构设计。

本节在基于 FVM 的控制方程离散方法中, 引入了基于结构的离散化描述方法, 搭建了结构的描述框架并构建了流体与固体间的材料属性插值模型; 提出了拓扑优化数学模型, 明确了设计变量、目标函数以及约束条件等, 并提出了自然对流拓扑优化方法。

2.1 自然对流拓扑优化方法

在上节所提多孔介质域的概念下, 引入了导热率和渗透率两种材料属性, 以此来区分固体与液体。这在物理模型上很好地解决了流体、固体的差异, 但在实际求解中, 计算的最小单元是以有限体网格做区分的。此时, 材料属性是基于网格分配的。

为此, 对区域 x , 引入设计变量场 $\gamma(x)$ 来描述整个区域内的二元 (固体、液体) 材料分布情况。对区域内的任意一点 x_i , 用 $\gamma(x_i) = 0$ 表示固体材料, 用 $\gamma(x_i) = 1$ 表示流体材料。对于 $0 < \gamma(x_i) < 1$ 之间非固体也非流体的部分, 参考前面多孔介质的概

念进一步的定义。在这一部分中, x_i 点处的材料被认为是多孔材料, 其性质介于固体和流体之间, $\gamma(x_i)$ 代表流体体积占比。这样, 材料的导热系数、渗透率均可利用设计变量进行插值。

由于设计变量的引入, 寻找最优材料分布的结构设计问题, 变成了寻找合理的设计变量场的数值优化问题。约束函数使用体积约束, 以此建立了拓扑优化的数学模型

$$\begin{cases} \min_{\gamma} f_{\text{obj}}(\mathbf{u}(\gamma), \mathbf{P}(\gamma), \mathbf{T}(\gamma)) \\ \text{s. t. } \sum_{n=1}^{N_d} (1 - \gamma_n) V_n \leq r V_{\Omega_d} \\ 0 \leq \gamma_n \leq 1 \end{cases} \quad (9)$$

式中: f_{obj} 是自然对流散热器拓扑优化的目标函数; γ 是设计变量场向量; 物理场 $\mathbf{u}, \mathbf{P}, \mathbf{T}$ 是计算域中速度矢量、压力及温度场的数值分布; γ_n 是节点 n 对应的设计变量; V_n 是节点 n 对应的控制体积(二维模型为面积); V_{Ω_d} 是设计区域 Ω_d 的体积(二维模型为面积); N_d 是设计变量的总数; r 是固体体积上限。

强化散热通过对固体结构进行优化来借助自然对流, 尽可能地降低指定区域的温度, 以达到散热效果。借鉴文献[12-14]的思路, 采用指定区域的温度作为目标函数, 此时目标函数 f_{obj} 可写为

$$f_{\text{obj}} = \left(\sum_{i=1}^{n_k} T_i \right) / n_h \quad (10)$$

式中: n_k 为指定区域的离散单元数; T_i 是其中第 i 个离散单元节点上的温度; n_h 为计算域内的总单元数。

强化物质传输通过对固体结构进行优化来借助自然对流, 尽可能地增强指定区域的流体流动速率, 以达到增强物质传输效果, 此时目标函数 f_{obj} 写为

$$f_{\text{obj}} = \left(\sum_{i=1}^{n_k} v_{xi} \right) / n_h \quad (11)$$

式中: v_{xi} 是其中第 i 个离散单元节点上指定方向(如 x 方向)的速度, 该速度有正负之分以强调强化流动的方向。对于强化物质传输, 目标函数也可以选择能耗或者关心区域的压降作为目标函数。

自动微分方法^[21]已经在很多领域如深度学习中得到应用, 该方法的基本思想在于对任意复杂函数的处理: 将其视作一系列基本可为微分算子的组合, 并借助链式法则来计算函数导数。使用该方法求导时, 相关基本算子仅被进行符号转换, 因而可以保证求导的精度, 同时也可以避免在解析法求导中的可能存在的表达式膨胀问题。在具体的拓扑优化

方法框架构建中, 本文借助自动微分工具 CoDiPack^[21]来计算目标函数、约束函数对设计变量的灵敏度。

为了确保拓扑优化问题解的存在并避免形成棋盘图案, 必须对设计施加一些限制。常见的方法是对灵敏度和设计变量应用滤波器^[22]。本文同时采用了敏度过滤^[23]和密度过滤方法。

2.2 自然对流拓扑优化方法流程

结合第一节所提基于 FVM 的自然对流求解方法, 以及本节所提的结构描述模型及整套的拓扑优化方法, 针对一个具体的强化自然对流的结构设计问题, 建立了自然对流拓扑优化流程, 主要步骤如下。

(1) 初始化。确定待优化的模型, 针对当前设计模型, 确定优化过程中用于初始化和判定的相关参数: 设计变量场 $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n]$ 的初始值, 允许使用的最大固体体积占比 r , 优化循环迭代次数, 目标函数收敛条件等。

(2) 设立自然对流求解模型。针对上述设计模型, 确定问题的尺寸、材料属性、边界条件等, 并将计算域进行有限体网格划分。

(3) 更新设计模型。更新设计变量场, 并进行滤波操作以避免棋盘格现象, 同时更新材料属性。

(4) 数值分析与评估。将更新后的材料属性嵌入自然对流控制方程中, 进行迭代求解。根据设定的迭代求解次数及收敛条件, 得到当前设计变量场下的物理场分布情况。根据设计需求, 基于式(10)或(11)计算当前目标函数 f_{obj} 以及约束函数。基于自动微分法, 分析目标函数、约束函数对设计变量的灵敏度。

(5) 优化更新。使用基于梯度^[24]的移动渐近线方法(method of moving asymptotes, MMA)^[25]来对设计变量进行优化。其中, 输入为设计变量场、目标函数值与约束函数值、相关的灵敏度向量等。输出为新的设计变量场, 同时对设计变量场再次密度滤波。更新后, 对结果进行判断, 包括是否达到迭代次数上限以及目标函数变换量已经小于特定值。若不满足条件, 则回到步骤(3)中, 重新更新设计模型, 并重复上述过程; 若满足条件, 则停止迭代, 并输出当前设计变量场结果作为最终设计结果。

在优化迭代过程当中, 多次涉及到对相关数据(如设计变量场、目标函数灵敏度、约束函数灵敏度)的滤波操作, 且整个过程数据流动较为复杂。图2展示了在具体实现中, 相关数据的处理过程。设计变量场数据读入自然对流求解器后, 进行分析, 分别

得到目标函数、约束函数及其灵敏度,在此处对灵敏度进行一次滤波。将滤波后的灵敏度、目标函数、约束函数、上一代优化后的设计变量场,一起输入到 MMA 优化器,得到更新后的设计变量场,并存储。然后,此处对设计变量场进行一次滤波。根据收敛进行判定,重复进行上述过程,或者输出结果。

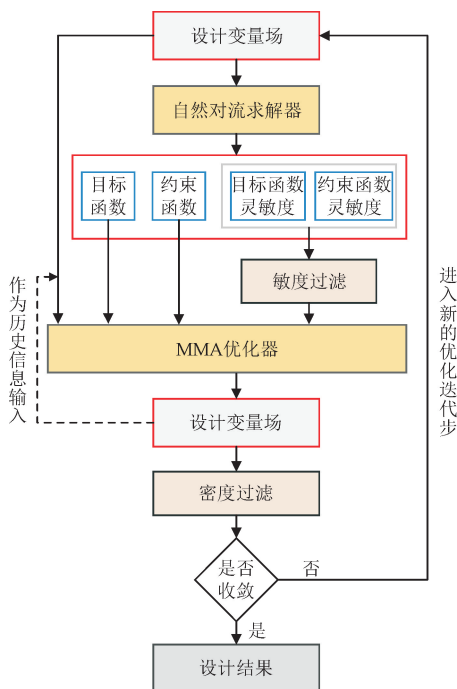


图2 拓扑优化过程中数据的流动及滤波情况

Fig. 2 Flow and filtering of data during topology optimization

3 自然对流拓扑优化求解方法验证

首先通过二维浮力流问题,验证第一节所提出的热流耦合模型及数值分析方法的正确性,并选用商业软件 COMSOL 进行了对比分析。随后,以强化物质传输为优化目标,实施了自然对流拓扑优化设计,验证了提出的拓扑优化方法的有效性。

3.1 自然对流模型及求解方法的验证

二维浮力流问题为典型的自然对流问题。如图3所示算例,封闭方形区域内充斥着流体,其上下壁为绝热,左壁为高温壁,壁温 T_h 设置为 20°C ,右壁为低温壁,壁温 T_c 设置为 10°C ,矩形腔的所有边界均满足无滑移边界条件。考虑重力影响,重力加速度 g 方向向下,数值设置为 9.8 m/s^2 。方腔长度尺寸 D 设置为 0.1 m 。流体在左侧壁受热后,膨胀并浮升,并在右侧放热后下沉,继而形成自然对

流循环。此处,流体选用空气,材料参数如下:流体密度为 1.2886 kg/m^3 ,流体动力黏度为 $1.716 \times 10^{-5}\text{ Pa}\cdot\text{s}$,流体比热容为 $1004.7\text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$,流体体积热膨胀系数为 0.00347 K^{-1} ,流体导热系数为 $0.0257\text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ 。

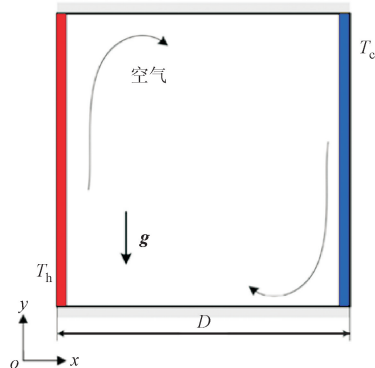


图3 二维浮力流问题案例

Fig. 3 A case of a two-dimensional buoyant flow problem

COMSOL 软件具备出色的多物理场耦合分析能力,适合用于进行自然对流问题的仿真分析。通过与商用 COMSOL 软件的二维求解结果对比,可以验证本文所提方法在二维自然对流问题分析上的合理性及求解精度。在 COMSOL 分析模型中,选择二维问题,设置物理场为层流,问题状态设置为稳态,层流节点为不可压缩流动,并选择包含重力选项。在多物理场节点中,选择布辛涅斯克近似。

图4(a)为采用 COMSOL 高精度网格求解结果。在网格划分中,将整个区域使用普通的三角形网格划分,并对边界层加密,设置网格密度为超细化,包含 16 992 个域单元和 600 个边界元。图4(b)为采用 COMSOL 普通网格求解的结果,其与图4(a)主要区别在于采用正四边形网格进行划分,并删去对边界层的处理。图4(c)为采用本文所提 FVM 方法进行求解的结果,使用正四边形有限体网格对问题域进行划分,高度和宽度方向的单元数为 150。

从图4(a)的结果来看:压力出现明显分层现象, x 方向最大速度出现在左上角与右下角,其值为 $0.027\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, y 方向最大速度出现在两侧壁板中间,其值为 $0.048\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$;温度分布也出现明显的分层现象,上层为高温空气,下层为低温空气,中层温度位于二者之间。这与实际情况相符。从图4(b)求解结果来看:压力分层与图4(a)类似, x 方向最大速度出现在左上角与右下角,其值为 $0.028\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, y 方向最大速度出现在两侧壁板中间,其值为 $0.048\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$;

温度分层与前者类似。从图 4(c)求解结果来看, x 方向最大速度出现在左上角与右下角,其值为 $0.025\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, y 方向最大速度出现在两侧壁板中间,其值为 $0.048\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$;温度分层与前者类似,压力场的分层相同。

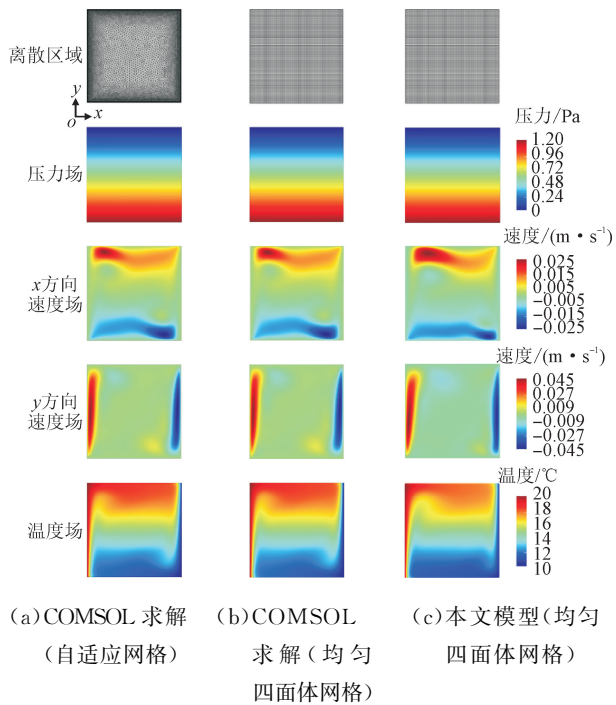


图 4 二维浮力流问题案例验证

Fig. 4 Case validation of a two-dimensional buoyant flow problem

对比图 4 中 3 种求解方法可知, (a) 中基于边界加密化的三角形网格分析结果更接近于流体自然对流换热的真实值, 而 (b)、(c) 中使用了更为简单的网格。比较图 4 中 3 种方法得到的结果可知, 压力场、速度场与温度场的分布趋势十分接近, 各类误差均小于 3%, 由此证明本文方法在求解流体自然对流问题时能提供较好的计算精度。

3.2 强化散热效果的自然对流拓扑优化(散热器)

为验证本文方法在强化散热拓扑优化方面的有效性, 以二维流固耦合自然对流的强化散热拓扑优化为算例进行验证。如图 5 所示, 在封闭的矩形方腔内, 存在着流体区域和设计区域, 设计区域内的材料属性未定。底部有一热源进行加热, 固体将热量传导至周围的空气, 使之产生自然对流, 设计目标为最小化热源处的平均温度。

矩形方腔尺寸为 $H\times W=8\text{ cm}\times14\text{ cm}$, 设计区域尺寸为 $h\times w=5\text{ cm}\times8\text{ cm}$ 。矩形腔上边界及左右边界温度恒定为 $T_w=15\text{ }^{\circ}\text{C}$, 除热源以外的其余

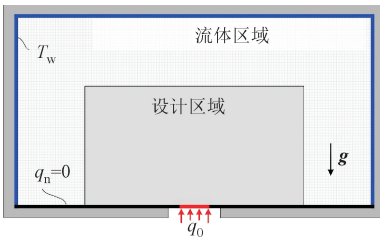


图 5 二维自然对流强化散热问题案例

Fig. 5 A case of an enhanced heat dissipation problem of two-dimensional natural convection

下边界绝热, 而且矩形腔的所有边界均满足无滑移边界条件。热源设置为线热源, 其尺寸 $B=0.4\text{ cm}$, 热流密度 $q_0=1.0\times10^5\text{ W/m}^2$ 。材料参数同 3.1 小节。此外, 固体导热系数为 $2.57\text{ W/(m}\cdot\text{K)}$, 流体反渗透率为 0, 固体反渗透率为 $1.0\times10^5\text{ Pa}\cdot\text{s/m}^2$ 。该算例的优化函数、设计变量可描述为

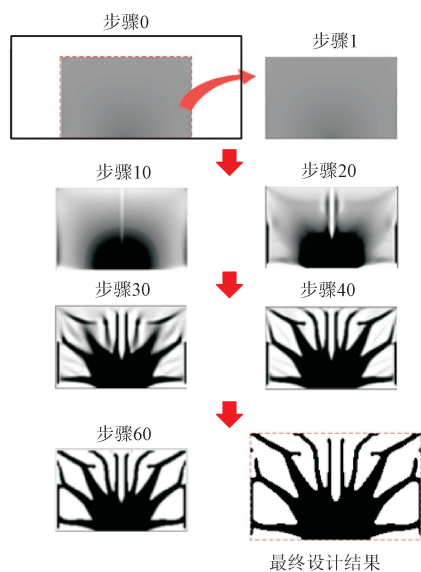
$$\begin{cases} \min_{\gamma} f_{\text{obj}}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\gamma}), \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\gamma}), \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\gamma})) = (\sum_{i=1}^{n_h} T_i) / n_h \\ \text{s. t. } \sum_{n=1}^{N_d} (1 - \gamma_n) V_n \leq r V \alpha_d \\ 0 \leq \gamma_n \leq 1 \end{cases}$$

(12)

在计算中, 固体导热系数为 $2.57\text{ W/(m}\cdot\text{K)}$, 流体反渗透率为 0, 固体反渗透率为 $1.0\times10^5\text{ Pa}\cdot\text{s/m}^2$ 。整个计算区域被离散为 140×160 个有限体胞体, 其尺寸为 $H/160$ 。相应地, 总自由度数为 90 804, 设计域由 79×99 个有限体单元组成, 且优化设计变量数为 8 000。滤波半径被设为有限体胞体尺寸的 2.5 倍, 即 $R_{\min}=H/64$ 。自然对流热传递的拓扑优化数学模型如式(9)所示, 目标函数如式(10)所示。

热沉固体材料体积占比小于 50%, 初始的材料分布采用均匀分布, 即设计变量 γ_n 的初始值为 0.5。设计过程包括优化的大循环和每一步优化中的仿真循环。在仿真循环中, 当物理场的残差小于 10^{-12} 量级或者相对于初始值下降了 8 个数量级时, 认为仿真达到收敛条件。仿真循环的最大迭代次数设定为 3 500。对于优化循环, 收敛条件设定为 2 次毗连迭代中, 设计变量的最大变化值小于 0.01。

设计迭代过程如图 6 所示, 平均每次迭代用时为 725.5 s。可以看出, 最终设计结果类似于树状, 均匀向四周展开分叉。初始布局下目标函数为 $116.85\text{ }^{\circ}\text{C}$, 优化后目标函数值为 $87.85\text{ }^{\circ}\text{C}$, 温度降低了约 $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ 。经过 98 次迭代, 最终收敛。



黑色—固体材料；白色—流体材料。

图6 拓扑优化迭代过程

Fig. 6 Iterative process of topology optimization

图7(a)和(b)展示了拓扑优化前后的速度场与温度场结果对比。可以看出,优化结果呈树状分布,有效地增大了固体与周围流体的接触面积,这使得热量可以更有效地以热传导形式传出,进而对热源处进行散热。流体流动速度有所降低,其原因是当热流密度载荷为 $1.0 \times 10^5 \text{ W/m}^2$ 时,优化结果的格拉晓夫数为 5×10^3 ,此时结构对流换热强度较低,热扩散为主要的传热形式。

为对上述拓扑优化结果进行进一步验证,采用 COMSOL 软件对该算例进行了计算,采用的参数一致,拓扑优化计算结果如图7(c)所示。可以看出,采用 COMSOL 的计算结果与本文方法的结果较为接近,但是略有不同,特别是其优化后的最大温度为 90.53°C ,略高于本文方法得到的目标函数值 87.85°C 。上述对比证明了本文方法的有效性。

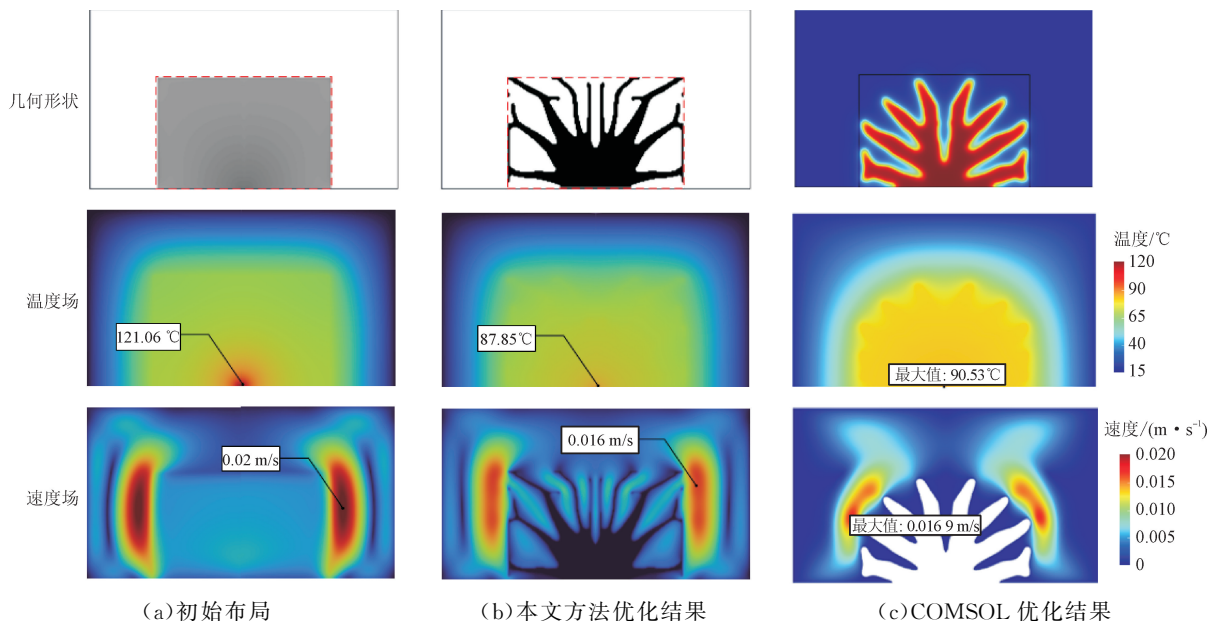


图7 拓扑优化前后的温度场与速度场

Fig. 7 Temperature and velocity fields before and after topology optimization

3.3 强化物质传输的自然对流拓扑优化(微泵)

针对强化物质传输的拓扑优化问题,目标函数为式(11),采用微泵算例进行验证。如图8所示,有一矩形腔体,其由2个方块组成。上半部分为一倒U型的流道,流道内充斥着空气并与固体区域换热,下半部分灰色为设计域。

设计域左侧为高温壁,温度为 25°C ,右侧为低温壁,温度为 15°C ,其余壁面为绝热壁,所有壁面均满足无滑移条件。优化目标为增强黄线处流体向右的流速。腔体整体尺寸为 $H \times L = 8 \text{ mm} \times 4 \text{ mm}$;设

计域尺寸为 $L \times L = 4 \text{ mm} \times 4 \text{ mm}$;U型流道宽度 $W = 0.8 \text{ mm}$ 。材料参数同3.1小节。此外,固体导热系数为 $2.57 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$,流体反渗透率为0,固体反渗透率为 $1.0 \times 10^5 \text{ Pa} \cdot \text{s/m}^2$ 。该算例的优化函数、设计变量可描述为

$$\begin{cases} \min_{\gamma} f_{\text{obj}}(\mathbf{u}(\gamma), \mathbf{P}(\gamma), \mathbf{T}(\gamma)) = \left(\sum_{i=1}^{n_h} v_{xi} \right) / n_h \\ \text{s. t.} \quad \sum_{n=1}^{N_d} (1 - \gamma_n) V_n \leq r V_{\Omega_d} \\ 0 \leq \gamma_n \leq 1 \end{cases} \quad (13)$$

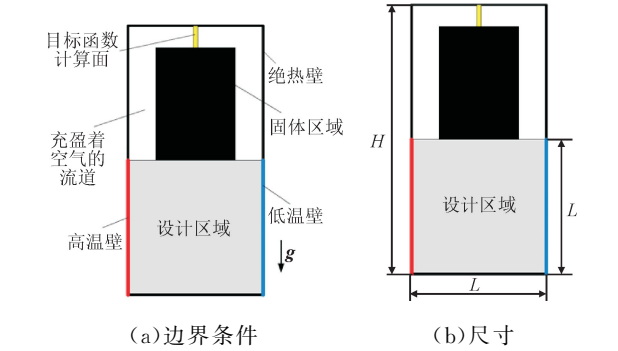


图 8 自然对流微泵问题的边界条件与尺寸

Fig. 8 Boundary conditions and dimensioning cases for the natural convection micropumping problem

在进行实际的设计前,首先基于 FVM 对问题进行离散。整个计算域适用 50×100 个有限体单元离散,其自由度为 20 000;设计域由 50×50 个有限体单元组成,设计变量数为 2 500。滤波半径被设为有限体单元尺寸的 2.5 倍,即 $H/40$ 。在该问题中,自然对流热传递的拓扑优化数学模型如式(9)所示,设计目标为最大化目标函数计算面上的速度,且指定速度方向向右为正,目标函数采用式(11)。

设计域中固体材料体积占比上限为 50%,初始的材料分布采用均匀分布,即设计变量 γ_n 的初始值为 0.5。在仿真循环中,当物理场的残差小于 10^{-12} 数量级或者相对于初始值下降了 8 个数量级时,认为仿真达到收敛条件。仿真循环的最大迭代次数设定为 3 500。对于优化循环,收敛条件被设定为两次毗连迭代中,设计变量的最大变化值小于 0.01。为便于后续计算,设计结果被映射为一黑白的二元结果。

基于本文方法对该问题进行寻优,优化迭代过程如图 9 所示。在 40 次迭代后,问题收敛并结束优化。问题初始目标函数值为 0.012 m/s,最终目标函数值为 0.08 m/s,且整个区域变得联通。可以看出,最终结构为一正 U 型流道,与上部相通,形成了一个完整的对流通路。不足的是,最终设计结果中仍存在较多的中间密度单元,因此对最终优化结构进行后处理。首先,为满足材料用比的约束前提,将迭代结果的密度矩阵进行过滤,得到满足 50% 固体材料体积占比条件的结构。其次,以减少流道突变、增强其连通性为设计需求,对流道结构进行光滑化处理,增强其结构可描述性,并且这样更符合实际加工技术要求性。

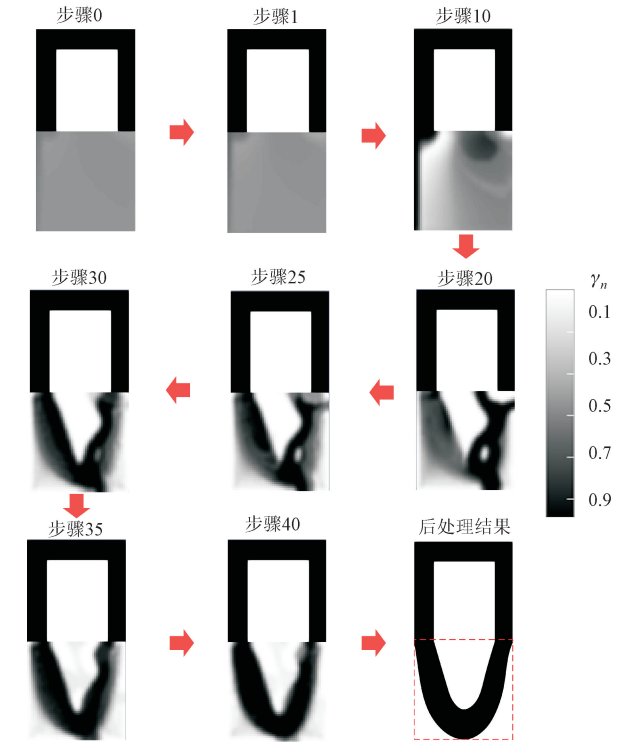


图 9 自然对流微泵优化设计过程

Fig. 9 Natural convection micropump optimization design process

初始设计布局、最终设计结果,及其各自物理场的分布如图 10 所示。可以看出:在最终的优化结果中,设计区域出现了近似 U 型的流道;在左侧高温壁的驱动下,流体膨胀,并向上浮动;在右侧低温壁的作用下,流体收缩而下沉;U 型流道的存在使得整个区域联通,并在整个区域形成促使流体循环流动,流道内最大流体速度由 0.022 m/s 提升至 0.049 m/s。该系统无需外界动力部件,就能自发完

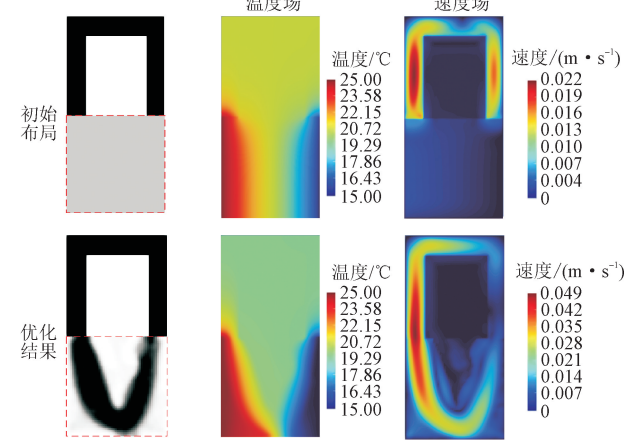


图 10 自然对流微泵设计结果及物理场分布

Fig. 10 Optimized design results and physical field distribution of natural convection micropumps

成物质输送,故称之为自然对流微泵。该算例的实施,证明了本文方法对于提升强化自然对流物质输送能力的效果。

4 结 论

本文建立了基于有限体积法的自然对流换热器拓扑优化方法,并对方法进行了验证。

(1)建立了自然对流换热的物理和数学模型,提出了基于有限体积法的高效自然对流求解方法。通过引入常物性假设、Boussinesq 假设等,建立了层流自然对流换热模型。为了同时考虑流体与固体介质,基于多孔介质概念,对流体与固体引入了渗透率和导热率等参数,据此修正了控制方程,得到了能统一描述流体与固体特性的控制方程。基于有限体积法对该方程进行求解,并推导了相应的迭代求解公式。

(2)建立了基于有限体积法的自然对流拓扑优化方法。通过构建流体与固体间的材料属性插值模型,将结构优化设计问题转换为设计变量场寻优的数学问题;针对自然对流拓扑优化中如何增强散热能力与增强物质传输能力的问题,提出了拓扑优化的数学模型,明确了设计变量、目标函数以及约束条件等,提出了高效的自然对流拓扑优化方法框架。

(3)为验证提出的自然对流求解方法,分别用提出的求解方法和商业软件,对二维浮力流问题进行分析求解,验证了所提自然对流换热模型及求解方法在二维问题分析上的合理性。以散热器和微泵为例进行自然对流拓扑优化设计,验证了所提出的拓扑优化方法在优化自然对流在强化散热和强化物质传输方面的可行性和有效性。

参考文献:

- [1] LEE Y J, KIM S J. Thermal optimization of the pin-fin heat sink with variable fin density cooled by natural convection [J]. *Applied Thermal Engineering*, 2021, 190: 116692.
- [2] 田沿杰, 林晓玲, 汪林, 等. 国外舰艇一体化反应堆技术应用 [J]. *舰船科学技术*, 2019, 41(2): 154-157. TIAN Yanjie, LIN Xiaoling, WANG Lin, et al. Research on the application of foreign warships' integrated reactor technology [J]. *Ship Science and Technology*, 2019, 41(2): 154-157.
- [3] JOO Y, KIM S J. Comparison of thermal performance between plate-fin and pin-fin heat sinks in natural convection [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2015, 83: 345-356.
- [4] 阳祥, 陶文铨. 高瑞利数下封闭腔内自然对流的数值模拟 [J]. *西安交通大学学报*, 2014, 48(5): 27-31. YANG Xiang, TAO Wenquan. Numerical simulations for natural convection with high Rayleigh number in a tall rectangular cavity [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2014, 48(5): 27-31.
- [5] 丁昊, 陶文铨. 水平热板上液态金属自然对流的数值模拟 [J]. *工程热物理学报*, 2021, 42(8): 2035-2039. DING Hao, TAO Wenquan. Numerical simulation of natural convection of liquid metal above a heated horizontal plate [J]. *Journal of Engineering Thermophysics*, 2021, 42(8): 2035-2039.
- [6] 田东东, 王会, 刁永发, 等. 金属泡沫铜/石蜡复合相变材料融化传热特性的实验研究 [J]. *西安交通大学学报*, 2020, 54(3): 188-196. TIAN Dongdong, WANG Hui, DIAO Yongfa, et al. Experimental study on the melting heat transfer characteristics of paraffin/copper foam composite [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2020, 54(3): 188-196.
- [7] 解岩, 欧阳洁, 周文, 等. 自然对流换热的高精度非结构网格有限体积法 [J]. *计算物理*, 2013, 30(3): 337-345. XIE Yan, OUYANG Jie, ZHOU Wen, et al. A high accuracy unstructured grid finite volume method for natural convection heat transfer [J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2013, 30(3): 337-345.
- [8] ALEXANDERSEN J. Topology optimisation for coupled convection problems [D]. Copenhagen: Technical University of Denmark, 2013.
- [9] BRUNS T E. Topology optimization of convection-dominated, steady-state heat transfer problems [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2007, 50(15/16): 2859-2873.
- [10] ALEXANDERSEN J, AAGE N, ANDREASEN C S, et al. Topology optimisation for natural convection problems [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2014, 76(10): 699-721.
- [11] ALEXANDERSEN J, SIGMUND O, AAGE N. Large scale three-dimensional topology optimisation of heat sinks cooled by natural convection [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2016, 100: 876-891.
- [12] ALEXANDERSEN J, SIGMUND O, MEYER K E, et al. Design of passive coolers for light-emitting diode lamps using topology optimisation [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2018, 122:

- 138-149.
- [13] LI Hanling, LAN Daiyan, ZHANG Xianming, et al. Investigation of the parameter-dependence of topology-optimized heat sinks in natural convection [J]. *Heat Transfer Engineering*, 2022, 43(11): 922-936.
- [14] 李含灵, 蓝代彦, 张显明, 等. 自然对流散热齿的拓扑优化 [J]. *工程热物理学报*, 2022, 43(5): 1357-1361.
- LI Hanling, LAN Daiyan, ZHANG Xianming, et al. Topology optimization of the natural convection fin heat sink [J]. *Journal of Engineering Thermophysics*, 2022, 43(5): 1357-1361.
- [15] COFFIN P, MAUTE K. A level-set method for steady-state and transient natural convection problems [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2016, 53(5): 1047-1067.
- [16] 吴璇, 陈群. 基于不动点迭代的自然对流热沉拓扑优化 [J]. *工程热物理学报*, 2020, 41(9): 2241-2246.
- WU Xuan, CHEN Qun. Topology optimization of natural convection heat sink based on fixed point method [J]. *Journal of Engineering Thermophysics*, 2020, 41(9): 2241-2246.
- [17] BAĪRI A, ZARCO-PERNIA E, GARCÍA DE MARÍA J M. A review on natural convection in enclosures for engineering applications: the particular case of the parallelogrammic diode cavity [J]. *Applied Thermal Engineering*, 2014, 63(1): 304-322.
- [18] ROE P L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 1981, 43(2): 357-372.
- [19] CHORIN A J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems [J]. *Journal of Computational Physics*, 1967, 2(1): 12-26.
- [20] WEISS J M, MARUSZEWSKI J P, SMITH W A. Implicit solution of the Navier-Stokes equations on unstructured meshes [C]//13th Computational Fluid Dynamics Conference. Reston, VA, USA: AIAA, 1997: AIAA 1997-2103.
- [21] SAGEBAUM M, ALBRING T, GAUGER N R. High-performance derivative computations using CoDiPack [J]. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 2019, 45(4): 38.
- [22] SIGMUND O. Morphology-based black and white filters for topology optimization [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2007, 33(4): 401-424.
- [23] 龙凯, 傅晓锦. 考虑密度梯度的敏度过滤方法 [J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2014, 26(4): 669-674.
- LONG Kai, FU Xiaojin. Sensitivity filtering method considering density gradient [J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2014, 26(4): 669-674.
- [24] GRIEWANK A, WALTHER A. Evaluating derivatives: principles and techniques of algorithmic differentiation [M]. 2nd ed. Philadelphia, PA, United States: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008.
- [25] SVANBERG K. The method of moving asymptotes: a new method for structural optimization [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, 24(2): 359-373.

(编辑 陶晴)